# Leçon 101 : Groupes opérant sur un ensemble, exemples et applications.

Soit $G$ groupe et $X$ un ensemble non vide.

## I] Généralités sur les actions de groupes.

### 1] Premières définitions

**déf 1** [PER p13] On dit que $G$ opère sur $X$ si on a une application $\begin{array}{l} G\times X \to X \\ (g,x)\mapsto g.x \end{array}$ vérifiant : 1) $\forall x\in X, e_G.x = x$
2) $\forall x\in X, (g,g')\in G^2, \ g.(g'.x) = (gg').x$
Cette application est appelée une action de groupe.

**Ex 2** [PER p14] $\mathfrak{S}_n$ opère sur $X = \{1\dots,n\}$

**Prop 3** [PER p13] Il revient au même de se donner un morphisme $\varphi : G \to \mathfrak{S}(X)$ où $\mathfrak{S}(X)$ désigne le groupe des bijections de $X$. (On pose $g.x = \varphi(g)(x)$)

**déf 4** [PER p14]
1) $G$ opère transitivement sur $X$ si on a $\forall x,y\in X, \exists g\in G, \ g.x = y$
2) $G$ opère fidèlement si $\varphi : G\to\mathfrak{S}(X)$ est injectif, c'est à dire, $\forall x\in X$, $(g.x = x) \Rightarrow (g = e_G)$.

**Rque 5** [PER p14] $G/\mathrm{Ker}\varphi$ opère fidèlement sur $X$.

**Ex 6** [PER p14] Soit $E$ espace vectoriel. Le groupe $GL(E)$ opère non fidèlement sur l'ensemble $P(E)$ des droites vectorielles de $E$ mais son quotient $PGL(E)$ opère fidèlement.

### 2] Orbites et Stabilisateurs

Soit $G$ agissant sur $X$.

**déf 7** [ROM p20] $\forall x\in X, G.x = \{g.x / g\in G\}$ est appelé orbite de $x$ sous l'action de $G$

**Rque 8** [ROM p20] Les orbites forment une partition de $X$.

**Ex 9** [ROM p21] Pour l'action de $\mathfrak{S}(X)$ sur $X$, il y a une seule orbite.

**déf 10** [ROM p22] $\forall x\in X, G_x = \{g\in G / g.x = x\}$ est le stabilisateur de $x$ sous l'action de $G$. Ce sont des sous-groupes de $G$ (en général non distingués).

**Ex 11** [PER p14] Pour l'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\{1\dots,n\}$, le stabilisateur d'un point est isomorphe à $\mathfrak{S}_{n-1}$.

**Th 12** [ROM p22] Pour $x\in X$, $\varphi_x : \begin{array}{l} G/G_x \to G.x \\ gG_x \mapsto g.x \end{array}$ est bien définie et bijective
Dans le cas où $G$ fini, on a $\mathrm{Card}(G.x) = [G:G_x] = \dfrac{\mathrm{Card}\, G}{\mathrm{Card}\, G_x}$ et en particulier, $\mathrm{Card}(G.x) \mid \mathrm{Card}\, G$.

### 3] Groupe et ensemble finis

**Th 13** [ROM p22] ÉQUATION DES CLASSES.
Soit $G$ fini agissant sur $X$ fini. En notant $\forall i\in[\![1,r]\!]$, $G.x_i$ toutes les orbites 2 à 2 distinctes, on a :
$$\mathrm{Card}(X) = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Card}(G.x_i) = \sum_{i=1}^{r} [G:G_{x_i}]$$

**Ex 14** [DEL p63] Tout groupe de cardinal $p^n$, $p\in\mathcal{P}$, a un centre non trivial (i.e ne contenant pas que l'élément neutre).

**déf 15** [Szp p241] Soit $p\in\mathcal{P}$. Un $p$-groupe est un groupe fini de cardinal $p^\alpha$, $\alpha\in\mathbb{N}^*$.

**Prop 16** [Szp p242] Soit $G$ $p$-groupe, $X$ ensemble fini. Soit $X^G = \{x\in X / \forall g\in G, g.x = x\}$ l'ensemble des points fixes de $X$ sous l'action de $G$.
Alors $|X| = |X^G| \ [\mathrm{mod}\ p]$

**déf 17** [Szp p242] On pose $\forall g\in G$, $\mathrm{Fix}(g) = \{x\in X / g.x = x\}$. On a :
$$X^G = \bigcap_{g\in G} \mathrm{Fix}(g)$$

**Prop 18** [Szp p242] BURNSIDE
Soit $G$ groupe fini, $X$ ensemble fini. Alors $\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \sum_{x\in X} |G_x|$
Et en notant $r$ le nombre d'orbites de $X$ sous l'action de $G$, on a :
$$r = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

**Ex 19** [DEL p64] Soit une roue de loterie partagée en 3 secteurs, chacun colorié d'une couleur parmi $p$ couleurs différentes. Le nombre de roues de loterie possible, sachant qu'on ne distingue pas 2 coloriages se déduisant l'un de l'autre par rotation est $\frac{1}{3}(2p+p^3)$

## II] Exemples et applications sur les groupes

### 1] Action par translation

**déf 20** [PER p15] On peut faire agir $G$ sur $G$ par translation à gauche en posant
$\begin{array}{l} G\times G \to G \\ (g,a)\mapsto g.a = ga \end{array}$

**Prop 21** [PER p15] $G$ opère simplement transitivement et fidèlement sur lui-même.

**Th 22** [PER p15] Si $G$ fini de cardinal $n$, $G$ est isomorphe à un sous groupe de $\mathfrak{S}_n$. (Théorème de CAYLEY)

### 2] Action par conjugaison

**déf 23** [PER p15] On peut faire agir $G$ sur $G$ par conjugaison en posant
$\begin{array}{l} G\times G \to G \\ (g,a)\mapsto gag^{-1} \end{array}$. Les orbites s'appellent les classes de conjugaison. Le stabilisateur de $a$ s'appelle centralisateur : $H_a = \{g\in G / ga = ag\}$.

**déf 24** [PER p15] On définit le centre de $G$ par $Z(G) = \{g\in G / \forall a\in G, ga = ag\}$

**Prop 25** [PER p16] Le centre d'un $p$-groupe $G$ distinct de $\{e_G\}$ n'est pas réduit à $\{e_G\}$.

### 3] Application aux Théorèmes de Sylow

**déf 26** [PER p18] Soit $G$ groupe fini de cardinal $n = p^\alpha m$, $p\in\mathcal{P}$, $p \nmid m$. On appelle $p$-sous groupe de Sylow de $G$ un sous groupe de cardinal $p^\alpha$.

**Rque 27** [PER p18] Dire que $P$ est un $p$-sous groupe de Sylow de $G$ signifie :
1) $P$ est un $p$-groupe
2) $[G:P]$ est premier à $p$.

**Théorème 28** [PER 18] SYLOW. Soit $G$ un groupe fini et $p$ un diviseur premier de $|G|$. Alors $G$ contient au moins un $p$-sous groupe de Sylow.

Lemme 29 [PER 19] Soit $G$ groupe de cardinal $p^\alpha m$, $p\in\mathcal{P}$ et $p\nmid m$ et $H$ un sous groupe de $G$. Soit $S$ un $p$-Sylow de $G$. Alors $\exists a\in G$ tel que $aSa^{-1}\cap H$ soit un $p$-Sylow de $H$.

Coro 30 [PER p19] Si $|G|=p^\alpha m$, $p\nmid m$, $G$ contient des sous groupes d'ordre $p^i$, $\forall i\leq\alpha$.

**Th 31** [PER p19] SYLOW. Soit $G$ groupe d'ordre $p^\alpha m$, $p\nmid m$. Alors :
1) Si $H$ sous-groupe de $G$ qui est un $p$-groupe, $\exists S$ $p$-Sylow tel que $H\subset S$
2) Les $p$-Sylow sont tous conjugués (et donc leur nombre $n_p$ divise $m$)
3) On a $n_p\equiv 1\,[p]$ et $n_p\,|\,m$

Coro 32 [PER 19] Si $S$ $p$-Sylow de $G$, on a :
$S\triangleleft G \iff S$ unique $p$-Sylow de $G \iff n_p=1$

Appli 33 [PER 20] Un groupe d'ordre 63 n'est pas simple.

## III] Applications à d'autres domaines des mathématiques

### 1] Théorème de Wedderburn

Soit $\mathbb{K}$ corps, $m\in\mathbb{N}^*$

déf 34 [PER p80] On note l'ensemble des racines $m^{ième}$ de l'unité dans $\mathbb{K}$ $\mu_m(\mathbb{K})=\{\xi\in\mathbb{K}\,/\,\xi^m=1\}$. C'est un sous-groupe de $\mathbb{K}^*$ de cardinal $\leq m$, donc cyclique.

déf 35 [PER 80] On désigne $K_m=D_{\mathbb{K}}(P_m)$ corps de décomposition de $P_m(X)=X^m-1$ sur $\mathbb{K}$. Alors $|\mu_m(K_m)|=m$ et $\mu_m(K_m)\simeq\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$

déf 36 [PER 80] On note $\mu_m^*(K_m)$ l'ensemble des racines $m^{ième}$ primitive de 1, ie $\xi\in K_m$ telle que $\xi^m=1$ et $\xi^d\neq 1$, $d<m$
(Autrement dit, $\xi$ générateur de $\mu_m(K_m)$ de sorte qu'il y a $\varphi(m)$ racines primitives de 1)

déf 37 [PER 80] Le $m^{ième}$ polynôme cyclotomique est $\phi_m(X)=\prod_{\xi\in\mu_m^*(K_m)}(X-\xi)$

Prop 38 [PER 80] $X^m-1=\prod_{d|m}\phi_d(X)$

**Th 41** [PER 82] WEDDERBURN : Tout corps fini est commutatif.

### 2] Actions sur les espaces de matrices

**déf 42** [DEL 60] $GL_n(\mathbb{K})$ agit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ : $\begin{array}{l} GL_n(\mathbb{K})\times\mathcal{M}_n(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ (P\ ,\ M)\mapsto PMP^{-1}\end{array}$
Les orbites sont formées de matrices semblables et sont appelées des classes de similitude.

**déf 43** [H2G2 p5] ACTION DE STEINITZ. Soit $\mathbb{K}$ corps. On note $G=GL_m(\mathbb{K})\times GL_n(\mathbb{K})$. On a une action de groupe :
$\begin{array}{l} G\times\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})\to\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \\ ((P,Q)\ ,\ A\ )\mapsto PAQ^{-1}\end{array}$ . les orbites sont appelées classes d'équivalence

Th 44 [H2G2 p5] Si $A$ est une matrice de rang $r$, alors elle est équivalente à $I_{m,n,r}=\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0\end{array}\right)\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

**Th 45** [H2G2 p6] THÉORÈME DU RANG. Deux matrices $A,B\in\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ sont dans la même orbite sous l'action de $G=GL_m(\mathbb{K})\times GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si elles ont le même rang :
$$G.A=G.B\iff rg A= rg B.$$
En particulier, les orbites sont paramétrées par le rang, entier compris entre 0 et $\min(m,n)$.

**déf 46** [H2G2 p262] Soit $\mathbb{K}$ corps, $n\in\mathbb{N}$. L'action de congruence est :
$\begin{array}{l} GL_n(\mathbb{K})\times S_n(\mathbb{K})\to S_n(\mathbb{K}) \\ (\ G\ ,\ A\ )\mapsto GA{}^tG\end{array}$ où $S_n(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices symétriques
Deux matrices appartenant à la même orbite pour cette action sont congruentes
(Le rang et le discriminant sont des invariants pour cette action)
On notera $Orb(A)$ l'orbite de congruence de $A$.

Th 47 [H2G2 p266] Soient $A,A'\in S_n(\mathbb{K})$
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, $Orb(A)=Orb(A')\iff rg A= rg A'$
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $Orb(A)=Orb(A')\iff rg A= rg A'$ et $sgn(A)=sgn(A')$
- Si $\mathbb{K}=\mathbb{F}_q$, $\forall A,A'\in S_n(\mathbb{F}_q)$ inversibles,
$Orb(A)=Orb(A')\iff disc A= disc A'$ $[\mathbb{F}_q^{*2}]$

### 3] Les actions en géométrie

déf 48 [H2G2 p218 Tome 2] Le groupe $Is(X)$ des isométries affines de $X\subset\mathbb{R}^3$ est le sous groupe des isométries de l'espace affine euclidien $\mathbb{R}^3$ qui stabilisent $X$.

déf 49 [H2G2 T2 p219] Soit $X$ partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Un point $E$ de $X$ est dit extrémal si $\forall A,B\in X$, $(E\in[AB])\Rightarrow(E=A$ ou $E=B)$

Prop 50 [H2G2 T2 p220] Soit $X\subset\mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $\mathcal{S}$ l'ensemble de ses points extrémaux. Alors tout élément de $Is(X)$ stabilise $\mathcal{S}$ et fixe en particulier l'isobarycentre de $\mathcal{S}$.

**Prop 51** [H2G2 T2 p221] Les groupes d'isométries d'un tétraèdre régulier $\Delta_4$ sont $Is(\Delta_4)\simeq\mathfrak{S}_4$ et $Is^+(\Delta_4)\simeq\mathfrak{A}_4$

**Prop 52** [H2G2 T2 p222] Les groupes d'isométries du cube sont $Is^+(C_6)\simeq\mathfrak{S}_4$ et $Is(C_6)\simeq\mathfrak{S}_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.